Место проведения: РУТ (МИИТ) Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 1 Класс 11

ЗАДАЧА	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
ОЦЕНКА	+	+	+	+	+	+	+	0			7

№1.

Запишем правую часть в виде $z = (x+y+1)^2 + 2(y+1)^2 + 1$

Очевидно, что min z будет, если $y+1=0$ и $x+y+1=0$

Отсюда получаем, что при $y=-1$ и $x=0$ минимальное значение z будет равно 1.

Ответ 1.

+

Задание 2.

Обозначим $a^x = z$ так как $a^x > 0$ для любого x, то неравенство можно представить как $2z^3 - 3z^2 + 1 \geq 0$. $z = 1$ будет корнем левой части неравенства. Вследствие этого, левая часть неравенства может быть записана как $(z-1)^2(z+\frac{1}{2}) \geq 0$. С учётом $z > 0$ получим, что это неравенство, а значит исходное неравенство, верно для любого x, что и требовалось доказать.

+

Задание 3.

+

Перепишем уравнение в виде $\cos x(1+\cos x)+$ $+\sin x(1-\cos^2 x)=0 \Leftrightarrow (\cos x+1)(\cos x+\sin x -$ $-\cos x\sin x)=0 \Rightarrow 1+\cos x=0$ или $\cos x+\sin x -$ $-\cos x \sin x=0$. В первом случае получаем, что $\cos x=-1 \Rightarrow x=\pi+2\pi k$ $k\in\mathbb{Z}$. Обозначим $\cos x+\sin x=a$, тогда $a^2-2a-1=0 \Rightarrow a=1\pm\sqrt{2}$. Так как $|\cos x|\leq 1$, то получаем, что $\sin x+\cos x=1-\sqrt{2}=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1-\sqrt{2}$. Значит, применяя формулу $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, получаем $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)+$ $+2\pi n$ $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{\pi+2\pi k,\ \frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)+2\pi n,\ n,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Задание 4

+

Находим ОДЗ: $x^2-x-2\geq 0$, $x=\frac{1\pm 3}{2}=-1,2$.
поэтому ОДЗ будет $x\leq -1$, $x\geq 2$.

Решим неравенство обобщённым методом интервалов.

Так как неравенство имеет вид $\frac{u_1\cdot u_2}{v_1\cdot v_2}>0$, где все множители u_1, u_2, v_1, v_2 представим в виде t_1-t_2, $t_1\geq 0$, $t_2\geq 0$ Отсюда получаем, что $t_1-t_2 \Leftrightarrow t_1^2-t_2^2$ с другой стороны, $|m|^2=m^2$ и поэтому имеем неравенство

$$\frac{\left(|x-2|^2-(1+x^2)^2\right)\left((x+4)^2-\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)^2\right)}{\left((1-x)^2-4^2\right)\left((3+x)^2-(x-5)^2\right)}>0.$$

Значит получаем равносильное неравенство:

$$\frac{9(-x^2+x-6)(x^2+x+2)(x+2)}{16(-x-3)(5-x)(x-1)}>0.$$ Заменяя квадратные трёхчлены, которые имеют отрицательный дискриминант, на: $-x^2+x-1$ на -1, а x^2+x+2 на 1, наконец получаем $\frac{x+2}{(x+3)(x-5)(x-1)}<0 \Leftrightarrow$

$-3<x<-2$, $1<x<5$.

А тогда с учётом ОДЗ ответ будет:

$-3<x<-2$, $2\leq x<5$.

Задание 5.

Докажем, что $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}<3$. представим это как $(\sqrt[3]{2})^3 \vee (3-\sqrt{3})^3 \Leftrightarrow 2 \vee 27-27\sqrt{3}+27-3\sqrt{3} \Leftrightarrow$ $30\sqrt{3} \vee 52 \Leftrightarrow (15\sqrt{3})^2 \vee 26^2 \Leftrightarrow 675<676$, т.к. первое число меньше второго.

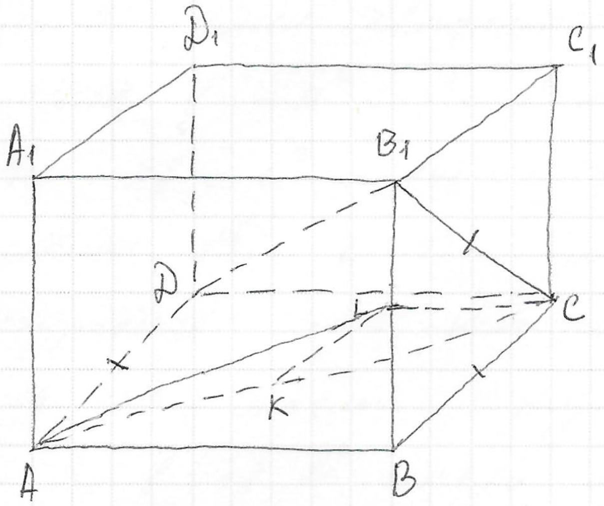
Ответ: $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}<3$.

+

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Задание 6.

Сделаем рисунок:



+

Обозначим L - середину ребра BB_1, т.к. - середина диагонали AC. так как $BC = AD = B_1C$, то треугольник BCB_1 равнобедренный $\Rightarrow LC \perp BB_1$. А так как $BB_1 \parallel AA_1$, что $BB_1 \perp AC \Rightarrow$ отрезок BB_1 перпендикулярен плоскости ACL. Осталось доказать, что отрезки BB_1 и DB_1 взаимно перпендикулярны. Но это выполняется так как отрезок $DB_1 \parallel LK$, лежащему в плоскости ACL.

Задание 7.

По теореме косинусов имеем, что квадрат любой стороны треугольника меньше, чем сумма длин квадратов двух других сторон значит $b^2 - a^2 < c^2 < \cancel{a^2} < a^2 + b^2$. Отсюда следует, что $96 < c^2 < 146 \Rightarrow \sqrt{96} < c < \sqrt{146}$. Между числами $\sqrt{96}$ и $\sqrt{146}$ лежит только одно натуральное число, которое нечётно. Это будет число 11. Значит треугольник равнобедренный и $c = b = 11$. А тогда проекция c на основание a равна $\frac{5}{2}$.

Ответ: $\frac{5}{2}$.

+

Место проведения РУТ (МИИТ) - г. Москва

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 1 Класс 11

ЗАДАЧА	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
ОЦЕНКА	+	+	+	+	+	+	+	0			7

1) $z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 4$

$\min z$ - ?

$z = (x+y+1)^2 + 2(y+1)^2 + 1$

$y+1=0$ и $x+y+1=0$

$\min z = 1$; $x=0$; $y=-1$

Ответ: $\min z = 1$

3) $\cos x + \cos^2 x + \sin^3 x = 0$

$\cos x(1+\cos x) + (1-\cos^2 x)\cdot \sin x = 0$

$(\cos x+1)(\cos x + \sin x - \cos x \cdot \sin x) = 0$

$\cos x = -1$ или $\cos x + \sin x - \cos x \cdot \sin x = 0$

$\cos x + \sin x = a$

$a^2 - 2a - a = 0$

$a = 1 \pm \sqrt{2}$

$\begin{cases} \sin x < 1 \\ \cos x < 1 \end{cases}$

+

$\sin x + \cos x = 1-\sqrt{2} \to \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1-\sqrt{2}$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi l$

Ответ: $\pi + 2\pi k$, $\frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi l$, $k, l \in Z$

2) $a^{2x} \leqslant \frac{1}{3}(1+2a^{3x})\ (a>0)$

$a^x = y$

$2y^3 - 3y^2 + 1 \geqslant 0 \to (y-1)^2(y+\frac{1}{2}) \geqslant 0$

т.к $y>0$ то неравенство верно

4) $\frac{(|x-2|-4-x^2)(|x+4|-\sqrt{x^2-x-2})}{(|1-x|-4)(|x+3|-|x-5|)} > 0$

ОДЗ:

$x \leqslant -1$
$x \geqslant 2$

$\frac{u_1 \cdot u_2}{v_1 \cdot v_2} > 0$ — запишем в виде $t_1 - t_2$

где $t_1 \geqslant 0$; $t_2 \geqslant 0$

$t_1 - t_2 \to t_1^2 - t_2^2 \quad |m|^2 = m^2$

$\frac{(|x-2|^2-(4+x^2)^2)(|x+4|^2-(\sqrt{x^2-x-2})^2)}{(|1-x|^2-4^2)((3+x^2)-(x-5)^2)} > 0$

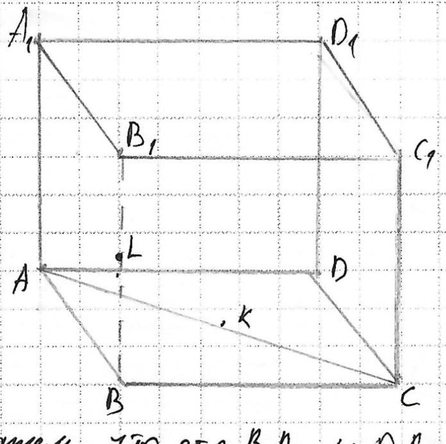
$\frac{9(-x^2+x-6)(x^2+x+2)(x+2)}{16(-x-3)(5-x)(x-1)} > 0 \quad D<0$

$-x^2+x-6 \quad |-1$
$x+x+2 \quad |1 \qquad \frac{x+2}{(x+3)(x-5)(x-1)} < 0$

$-3 < x < -2$ или $1 < x < 5$

$\to$ не удов ОДЗ

Ответ: $-3 < x < -2$; $2 \leqslant x \leqslant 5$

6) 

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\angle CAA_1 = 90$

$\angle CB = AD$. Доказать что $\angle DB_1B = 90$

Пусть L - середина ребра BB_1, K - серед диагонAC

т.к $BC = AD = B_1C$ то $\triangle BCB_1$ - равнобедр

$\angle C \perp BB_1$ A тк $\parallel AA_1$, то $BB_1 \perp AC$ отрезок

BB_1 перпендикулярен плоскости ACL

докажем, что отр BB_1 и DB_1 - перпендикулярен т.к. DB_1 параллелен KL

лежащему в плоскости ACL

172 831

2 из 3

) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3} < 3$

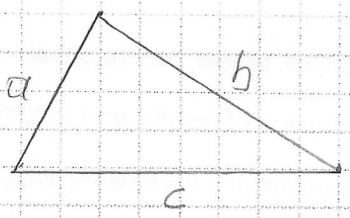
$(\sqrt[3]{2})^3 \vee (3-\sqrt{3})^3$

$(2 \vee 27 - 27\sqrt{3} + 27 - 3\sqrt{3}) \to (30\sqrt{3} \vee 52) \to ((15\sqrt{3})^2 \vee 26^2)$

$675 < 676$

Ответ: число $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3} <$ числа 3

7)



В остроугольном треугольнике квадрат любой стороны меньше чем сумма квадратов длин двух других сторон

$b^2 - a^2 < c^2 < a^2 + b^2$

$36 < c^2 < 146$

$\sqrt{36} < c < \sqrt{146}$ – между ними лежит одно натуральное число 11

$c = 11$ – значит треугольник равнобедренный $c = b = 11$, $\frac{5}{2}$

Ответ: $\frac{5}{2}$

2

172,831

3 из 3

Место для скрепки

НАВИГАТОР - 2025 · 15 февраля 2026г. (очный тур)

Место проведения: ФГБОУ ВО

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 4 Класс 11

ЗАДАЧА	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
ОЦЕНКА	+	0	+	~~0~~ 7	±	+	±	+			6

№5

$\frac{8-\sqrt{85}}{3}$ и $\frac{27-4\sqrt{66}}{9}$. Рассмотрим сперва $\frac{8-\sqrt{85}}{3}$ (1), затем $\frac{27-4\sqrt{66}}{9}$ (2).

(1) $\frac{8-\sqrt{85}}{3}$

$\sqrt{85}$: $9^2=81$, $10^2=100$ => Наиболее прибл-е знач-е к иск. корню будет $\boxed{9,2}$, т.к. $9,2^2 \cong \boxed{84,64}$, что наиболее близко к иск. корн. => $\frac{8-\sqrt{85}}{3} \cong \frac{8-9,2}{3} \cong \frac{-1,2}{3} \cong -0,4$

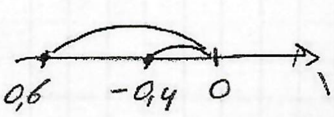
±

(2) $\frac{27-4\sqrt{66}}{9}$

$\sqrt{66}$: $8^2=64$, $9^2=81$ => Максимально приблмж. значение иск. корня $\cong \boxed{8,1}$, т.к. $8,1^2 \cong \boxed{65,61}$

Из этого следует, что: $\frac{27-4\cdot \cancel{65,61}\ 8,1}{9} \cong \frac{-32,4+27}{9} \cong -\frac{5,4}{9} \cong -0,6$.

Т.к. числа отр-е, то:

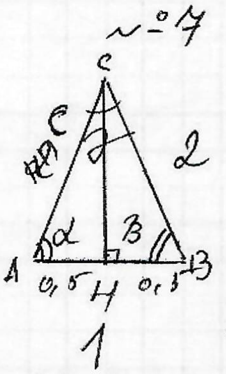


$-0,4 > -0,6$ => $\frac{8-\sqrt{85}}{3} > \frac{27-4\sqrt{66}}{9}$

Ответ: > (больше)

№7

Дано:
ΔABC - остр.
$AB = a = 1$
$BC = b = 2$
$AC = c \in Z$
$S_{\Delta ABC}$ - ?



Решение:

1) 4 ряда натуральных чисел: $1, \cancel{1}, 2, 3, 4 \ldots\ldots$

Из данного ряда нам подходит только число (цифра) 2

в остальных случаях ΔABC не может существовать. $\Rightarrow AC = 2;\ c \in Z$

2) Из пункта №1 мы получаем, что $AC = BC = 2$ (ед). $\Rightarrow \Delta ABC \to$ р/б $\Rightarrow \angle B = \angle \alpha$. Из р/б ΔABC следует, что высота, пров-я из (·)C к стороне AB (равн. CH), разделит AB на 2 равн. части $\Rightarrow AH = HB = 0,5$ (ед)

3) ∢ ΔCHA: $\angle H = 90°$; $\Rightarrow$ по теор. Пифагора: $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{4 - 0,25} = \sqrt{3,75} = \frac{\sqrt{15}}{2}$ (ед).

4) $S_\Delta = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ (ед²)

Ответ: $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ (ед²).

+

№3

$$\sin x \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos x \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} \right) = 1$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x \cos 2x} + \frac{\sin x}{\cos 2x \cos 3x} = 1$$

$$tg x + \frac{\sin x}{\cos x \cos 2x} + \frac{\sin x}{\cos 2x \cos 3x} = 1$$

$$tg x + \frac{tg 2x - tg x}{1} + \frac{tg 3x - tg 2x}{1} = 1 \Rightarrow \cancel{tg x} + \cancel{tg 2x} - \cancel{tg x} + tg 3x - \cancel{tg 2x} = 1$$

$tg\,3x = 1$

$3x = arctg(1) + \pi k, k \in Z$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$

$\boxed{ОДЗ}$: 1) $\cos x \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi z, z \in Z$

2) $\cos 2x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$.

3) $\cos 3x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi p}{3}, p \in Z$

8

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$.

№8

1) Рассм. $A = (\sqrt{26} + 5)^7$, тогда $B = (\sqrt{26} - 5)^7$ будет сопряженным для A. $\Rightarrow$ Произведение двух чисел равно:

$AB = (\sqrt{26}+5)^7(\sqrt{26}-5)^7 = (26-25)^7 = 1^7 = 1$

2) По ф-е бинома Ньютона:

$A = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} (\sqrt{26})^k 5^{7-k}$

$B = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} (\sqrt{26})^k (-5)^{7-k}$

3) Найдем сумму A и B. Она сост. только из чл. с четн-и степ-и $\sqrt{26}$, т.к. нечетн. взаимоуничт.

$A+B = 2(\binom{7}{0}(\sqrt{26})^0 5^7 + \binom{7}{2}(\sqrt{26})^2 5^5 + \binom{7}{4}(\sqrt{26})^4 5^3 + \binom{7}{6}(\sqrt{26})^6 5^1)$

Все члены в скобках целые, т.к. $(\sqrt{26})^{2n} = 26^n \Rightarrow A+B$ является четным числом. Обозначим его за N. $\Rightarrow A+B = N$

Т.к. $A+B=N$ и $A\cdot B=1$ (из 1 пункта), то $B=1/A$

$A+1/A=N$

$A=N-\frac{1}{A}$

4) Оценим B: $B=(\sqrt{26}-5)^7$. т.к $5<\sqrt{26}<6$, то

$0<\sqrt{26}-5<1 \Rightarrow 0<B^7<1^7 \Rightarrow 0<B<1$.

5) Опред. десятичн. знаки числа:

$A=N-B$; $0<B<1 \Rightarrow$ дроб. часть числа $A = 1-B$

Т.к. A больш. число, то B очень близко к нулю.

$B=(\sqrt{26}-5)^7$. Мы пок-м, что B дост-о мало, чтобы перв. 7 дес-х зн-в были нулями.

$(\sqrt{26}-5)^7=B \Rightarrow (\sqrt{26}-5)\cong\frac{1}{10}$

$B\simeq(0,1)^7\cong 0,0000001$.

6) $B<(\sqrt{26}-5)\cdot 1^6=0,1$

Восп. оц-ст: $\sqrt{26}-5=\frac{(\sqrt{26}-5)(\sqrt{26}+5)}{(\sqrt{26}+5)}=\frac{1}{\sqrt{26}+5}<\frac{1}{5+5}=\frac{1}{10}$

$\Rightarrow B=(\sqrt{26}-5)^7<\left(\frac{1}{10}\right)^7=0,0000001 \Rightarrow$ B им. как мин 7 нулей после зап.

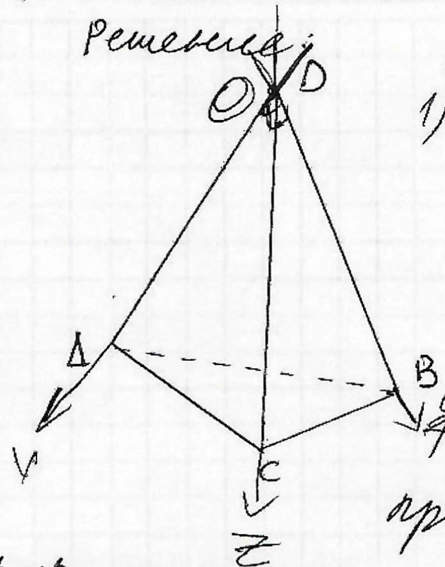
$A=N-B$, т.к. $0<B<0,0000001$, то A будет иметь вид $N-0,0000000\ldots$, что значит, что перв-е 7 зн-в после , равны нулю.

Ответ: ч.т.д.

№6

Дано:
ABCD – пир-а
D – верш
$\angle$ при D – пр-е
S – пл. соотв. гр
Д-ть:
$S^2_{ABC} = S^2_{ABD} + S^2_{BCD} + S^2_{CAD}$

Решение:



1) $DA = a$
$DB = b$
$DC = c$
Введем коорд. пл-ть: (XYZ).
т.к. при всех углах прямые, то, то грани пирамиды ABCD лежат на осях XYZ соотв-о.
=> Из сказ-о выше получаем коорд вершин ABCD.
$D(0;0;0)$; $A(a;0;0)$; $B(0;b;0)$; $C(0;0;c)$.
2) Грани явл-я п/у треугольниками с пр-и углами в вершине D. $\rightarrow S_{ABD} = \frac{1}{2} DA \cdot DB = \frac{1}{2} ab$
$S_{BCD} = \frac{1}{2} DC \cdot DB = \frac{1}{2} bc$; $S_{CAD} = \frac{1}{2} DC \cdot DA = \frac{1}{2} ca$. Возводим данные площади в квадрат => получаем:
$S^2_{ABD} = \frac{1}{4} a^2 b^2$; $S^2_{BCD} = \frac{1}{4} b^2 c^2$; $S_{CAD} = \frac{1}{4} c^2 a^2$.
3) По т-ее пиф-а: $AB = \sqrt{a^2+b^2}$; $BC = \sqrt{b^2+c^2}$; $CA = \sqrt{c^2+a^2}$
$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2} \Rightarrow S^2_{ABC} = \frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$
4) Док-о рав-а: $S^2_{ABC} = \frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{4}b^2c^2 + \frac{1}{4}c^2a^2$
$S^2_{ABD} + S^2_{BCD} + S^2_{CAD} = \frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{4}b^2c^2 + \frac{1}{4}c^2a^2 \Rightarrow$
=> таким обр-м рав-о док-о.
$S^2_{ABC} = S^2_{ABD} + S^2_{BCD} + S^2_{CAD}$, чтд → Ответ.

№ 4

$$\frac{\left((x^2+x+1)^{\frac{x+2}{x+3}}-(x^2+x+1)^2\right)\log_{x^2}(x+100)}{\left(\sqrt{x^2-x}-1-x^2\right)\left(|2x-1|-6\right)}>0$$

ОДЗ

1) $x+100>0 \Rightarrow x>-100$

$x^2-x\geq 0 \Rightarrow x(x-1)\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$

$x^2>0 \Rightarrow x\neq 0$; $x^2\neq 1$ т.к. осн. логар-а $\Rightarrow x\neq\pm 1;\ x\neq 0$

+Знаменатель не может быть равен нулю

2) * Числ-ль дроби: $\underbrace{\left((x^2+x+1)^{\frac{x+2}{x+3}}-(x^2+x+1)^2\right)}_{1}\underbrace{\log_{x^2}(x+100)}_{2}=N$

*Перв. мн-ль(1):

М1 $x^2+x+1>0$ (диск. отр.). Знак(1) зависит от ср-я пок-й степени. Если $x^2+x+1>1$, т.е. $x^2+x>0$ то $x\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$, то знак совп-т со зн. разн. пок-ей. $\frac{x+2}{x+3}-2=\frac{x+2-2(x+3)}{x+3}=\frac{x+2-2x-6}{x+3}=\frac{-x-4}{x+3}$

Если $x^2+x+1<1$ ОС, то знак(1) прот-и зн-у пок-й $\frac{-x-4}{x+3}$

М2

*Второй множ(2): в одз $x^2>1$ и $x+100>0 \Rightarrow (2)>0$

3) Исследуем ~~числитель~~ знам-ь:

$D=\left(\sqrt{x^2-x}-1-x^2\right)\left(|2x-1|-6\right)$

$D_1=\sqrt{x^2-x}-1-x^2$: в одз $x^2-x\geq 0$ $\sqrt{x^2-x}\geq 0$ $1+x^2>0$

Если $x\in(1;+\infty)$, то $x^2-x<x^2<(x^2+1)^2$

$D_1=\sqrt{x^2-x}-(x^2+1)$: $\sqrt{x^2-x}<x^2+1$ всегда.

При $x\in(1;+\infty)$ $\sqrt{x^2-x}<x^2+1$, при $x\in(-100;-1)$: $x^2-x>x^2$

$\sqrt{x^2-x}>|x|=-x$. $-x-1-x^2$; $x^2+x+1>0 \Rightarrow D_1$ отр-н

$D2 = |2x-1| - 6 \Rightarrow D2 > 0 \Rightarrow |2x-1| = 6 \Rightarrow 2x-1 > 6$ или $2x-1 < -6$

$2x > 7 \to x > 3,5$; $2x < -5 \Rightarrow x < -2,5$; $D_2 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2,5 < x < 3,5$; $D_2 = 0 \Rightarrow x = 3,5$; $x = -2,5$

4) $\frac{N}{D} > 0$ знак ND зав. от мн-е $|M_2 > 0$; $D_1 < 0|$ всегда,

тогда знак опр. знак. $\frac{-x-4}{x+3} \cdot D_2$; $x \in (-100; 1) \cup (1; +\infty)$

на инт. $(-100; -1) \to \frac{-x-4}{x+3} < 0$ (т.к. $-x-4 > 0$, $x+3 < 0$).

D2 мен. знак в $-2,5$. На инт-е $(1; +\infty) \to \frac{-x-4}{x+3} < 0$

т.к. $-x-4 < 0$; $x+3 > 0$. D2 мен. зн-к в 3,5).

5) Интервалы: $(-100; -2,5)$ $\frac{-x-4}{x+3} < 0$; $D_2 < 0$

Произв > 0; $(-2,5; -1)$ $\frac{-x-4}{x+3} < 0$; $D_2 > 0$ Произв < 0

$(1; 3,5)$ $\frac{-x-4}{x+3} < 0$; $D_2 < 0$. Произв > 0; $(3,5; +\infty)$

$\frac{-x-4}{x+3} < 0$; $D2 > 0$. Произв < 0.

+

Ответ: $x \in (-100; 2,5) \cup (1; 3,5)$

№1

1) Найти наим. Z, если $Z = 2x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 3$.

Данное выражение можно представить в виде суммы полн. кв-в:

$Z = (x^2 + 4xy + 4y^2) + (x^2 + 2x + 1) + 2 = (x+2y)^2 + (x+1)^2 + 2$

2) $(x+2y)^2 \geq 0$ и $(x+1)^2 \geq 0$, наим. знач. ф-и Z уот-е, когда они равны 0. $(x+2y)^2 = 0 \Rightarrow x+2y = 0$; $(x+1)^2 = 0 \to x+1 = 0$ $x = -1$

3) $-1 - 2y = 0 \to 2y = 1$; $y = 0,5$ (т.к. $x = -1$ (из (2)).

4) $Z = (-1+2 \cdot 0,5)^2 + (-1+1)^2 + 2 = 0^2 + 0^2 + 2 = 2$

+

Ответ: наим-е знач-е $Z = 2$.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 2 Класс 10

ЗАДАЧА	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
ОЦЕНКА	+	+	±	+	±	+	+	∓			7

№1

$Z = 4x^2 + 3y^2 + 4xy + 4x - 2y + 5$

$Z = (4x^2 + 4xy + y^2) + (4x + 2y) + 2y^2 - 4y + 5$

$Z = (2x+y)^2 + 2\cdot(2x+y) + 2\cdot(y^2 - 2y + 1) + 3$

$Z = ((2x+y)^2 + 2\cdot(2x+y) + 1) - 1 + 2\cdot(y-1)^2 + 3$

$Z = (2x+y+1)^2 + 2\cdot(y-1)^2 + 2$

Т.к квадраты чисел всегда неотрицательные, min значение достигается при:

1) $y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

2) $2x + y + 1 = 0 \Rightarrow 2x + 1 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

(+)

при $x = -1$, $y = 1$: $Z = 0^2 + 2(0)^2 + 2 = 2$

Ответ: наименьшее значение $Z = 2$.

№2.

Д-ть, что для любых $x, y \geq 0$ имеет место неравенство: $x^2 + xy + y^2 \leq 3\cdot(x - \sqrt{xy} + y)^2$.

Пусть $\sqrt{x} = a$ и $\sqrt{y} = b$, где $a, b \geq 0$, тогда неравенство принимает вид: $a^4 + a^2b^2 + b^4 \leq 3\cdot(a^2 - ab + b^2)^2$

$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 - ab + b^2)\cdot(a^2 + ab + b^2)$ (если a и b) > 0

$(a^2 - ab + b^2)\cdot(a^2 + ab + b^2) \leq 3\cdot(a^2 - ab + b^2)^2 \,|\, :(a^2 - ab + b^2)$

$a^2+ab+b^2 \le 3(a^2-ab+b^2)$

$a^2+ab+b^2 \le 3a^2-3ab+3b^2$

$2a^2-4ab+2b^2 \ge 0$

$2\cdot(a-b)^2 \ge 0$

Ответ: квадрат любого вещ. числа неотрицателен $\Rightarrow$ неравенство верно для любых $x, y \ge 0$.

ч. т. д.

(+)

№ 3.

$\tan^2 x \cdot \tan^2 3x \cdot \tan 4x = \tan^2 x - \tan^2 3x + \tan 4x$.

$\tan 4x \cdot (\tan^2 x \cdot \tan 3x - 1) = \tan^2 x - \tan^2 3x$

$\tan 4x = \dfrac{\tan^2 x - \tan^2 3x}{\tan^2 x \cdot \tan^2 3x - 1}$

(±)

$\dfrac{(\tan x - \tan 3x)\cdot(\tan x + \tan 3x)}{-(1-\tan x \cdot \tan 3x)\cdot(1+\tan x \cdot \tan 3x)} = -\tan(x-3x)\cdot \tan(x+3x)$

Получаем: $\tan 4x = \tan 2x \cdot \tan 4x$

$\tan 4x(1-\tan 2x) = 0$

1) $\tan 4x = 0 \Rightarrow 4x = \pi k \Rightarrow x = \dfrac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\tan 2x = 1 \Rightarrow 2x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi k}{4}$ (и) $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}$, при которых ~~...~~ функции в исх. ур-нении определены. ?

№ 4.

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

$x^2 2^{2x} + 9\cdot(x+2)2^x + 8x^2 \le (x+2)\cdot 2^{2x} + 9x^2 2^x + 8x + 16.$

$(x^2-x-2)\cdot 2^{2x} - 9\cdot(x^2-x-2)\cdot 2^x + 8\cdot(x^2-x-2) \le 0$

$(x^2-x-2)\cdot(2^{2x} - 9\cdot 2^x + 8) \le 0.$

$x^2-x-2 \le 0$ или $2^{2x} - 9\cdot 2^x + 8 \le 0$

$x^2-x-2=0$ $2^{2x} - 92^x + 8 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$ пусть $2^x = t$, $t > 0$.

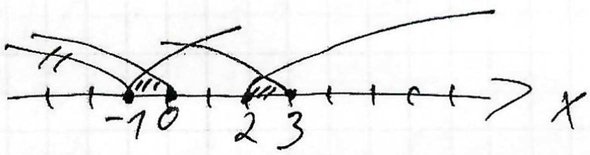
$x_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{array}\right.$ $t^2 - 9t + 8 = 0$

$D = 81 - 32 = 49$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 \ge -1 \\ x_2 \le 2 \end{array}\right.$ $t_{34} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow$

$t_3 = 8 \Rightarrow$ при $2^x = t$.

$t_4 = 1 \Rightarrow$ при $2^x = t$.



$\left[\begin{array}{l} x_3 = 3 \\ x_4 = 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 \le 3 \\ x_2 \le 0 \end{array}\right.$

$x \in [-1; 0] \cup [2; 3].$

Ответ: $x \in [-1; 0] \cup [2; 3].$

7

$\approx 5.$

$3\sqrt[3]{33} \; ? \; \sqrt{58} + 2$

1) $3\sqrt[3]{33}$: т.к. $3^3 = 27$ и $4^3 = 64$, то $\sqrt[3]{33} \approx 3{,}2.$

значит $3\cdot 3{,}2 \approx 9{,}6.$

2) $\sqrt{58} + 2$: т.к. $7^2 = 49$ и $8^2 = 64$, то $\sqrt{58} \approx 7{,}6$

значит: $7{,}6 + 2 = 9.6.$

$\left(3\sqrt[3]{33}\right)^3 = 27\cdot 33 = 891$

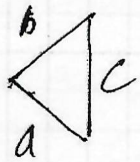
$\left(\sqrt{58}+2\right)^3 = 58\sqrt{58} + 3\cdot 58\cdot 2 + 3\cdot\sqrt{58}\cdot 4 + 8$, т.к. $\sqrt{58} \approx$

$\approx 7{,}615 \Rightarrow 70\cdot 7{,}615 + 356 = 889$

$891 > 889$

Ответ: $3\sqrt[3]{33} > \sqrt{58}+2$.

№ 7.



Дано: $a=3, b=5$; c – числ. нечёт.

Найти: $P_{\Delta abc}$.

Решение: 1) $a+b>c \Rightarrow 3+5>c \Rightarrow c<8$

и $a+c>b \Rightarrow 3+c>5 \Rightarrow c>2$. $c\in(2;8)$.

2) $c^2<a^2+b^2 = c^2<3^2+5^2 \Rightarrow c^2<34 \Rightarrow c<\sqrt{34}\approx$

$\approx 5{,}83$; $a^2<b^2+c^2 \Rightarrow 3^2<5^2+c^2 \Rightarrow 9<25+c^2$ (при любом $c>0$); $b^2<a^2+c^2 \Rightarrow 5^2<3^2+c^2 \Rightarrow 25<9+c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2>16 \Rightarrow c>4$.

3) Объединим ОГР для стороны c: $4<c<\sqrt{34}$

($4<c<\approx 5{,}83$)

т.к c по усл. нечётное ⇒ в интер. $(4; 5{,}83)$ существует только одно нечёт число – это 5. ⇒

$c=5$.

5) $P_{\Delta abc} = a+b+c \Rightarrow P=3+5+5=13$.

Ответ: $P_{\Delta ABC}=13$.

№ 8

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Д-во: $\frac{1}{(\sqrt{65}-8)^5}$ | $\cdot(\sqrt{65}+8)$; при $\frac{1}{\sqrt{65}-8}$

$$\frac{1}{\sqrt{65}-8} = \frac{\sqrt{65}+8}{(\sqrt{65}-8)\cdot(\sqrt{65}+8)} = \frac{\sqrt{65}+8}{65-64} = \sqrt{65}+8.$$

$\Rightarrow$ иск. число $= (\sqrt{65}+8)^5$

рассмотрим сопряж. число: $\alpha = \sqrt{65}-8$, заметим, что $8 < \sqrt{65} < 8{,}1$, т.к $8^2 = 64$, а $8{,}1^2 = 65{,}61$. $\Rightarrow 0 < \sqrt{65}-8 < 0{,}1$

2) $S = (\sqrt{65}+8)^5 + (\sqrt{65}-8)^5$, S - целое число.

Пусть $x = (\sqrt{65}+8)^5$ и $\varepsilon = (\sqrt{65}-8)^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = S - \varepsilon$, а т.к $0 < (\sqrt{65}-8)^5 < (0{,}1)^5$

$0 < \varepsilon < 0{,}00001$, значит x чуть меньше целого S; $x = S - 0{,}0000...$

3) а т.к $(\sqrt{65}-8)^5 < 0{,}1^5 = 0{,}0001... \Rightarrow$

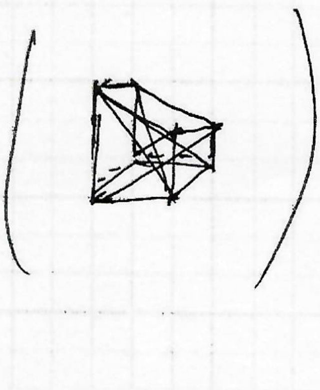
число начинается как $0{,}00000...$

ч. т. д.

?

+

№6.



Дано: $d_1 = 2$; $d_2 = 3$; $d_3 = 5$; $d_4 = 11$.

~~На~~ Решение: 1) $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 =$
$= 4(a^2+b^2+c^2) \Rightarrow 2^2+3^2+5^2+11^2 = 159.$
$\Rightarrow 4\cdot(a^2+b^2+c^2) = 159 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 = 39{,}75$
$\Rightarrow$

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$; $11^2 = 121 > a^2 + b^2 + c^2 = 39{,}75$ =>

это невозможно, т. к. даже при таких „переносе" (или парал-пед), самая длинная d не может быть больше суммы квадр. рёбер.

то-есть: для сущ. пар-педа должно вы-полняться усл.: самая длинная диагональ < суммы 3-ёх других.; $11 < 2 + 3 + 5$ => $11 < 10$ — ложно.

Ответ: нет, невозможно.

ч. т. д.

4

НАВИГАТОР - 2025 15 февраля 2026г. (очный тур)

Место проведения: ФГБОУ ВО «Сибирский

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант 2 Класс 11

ЗАДАЧА	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
ОЦЕНКА	+	+	±	+	±	+	+	−			7

Задача №1

$z = 4x^2 + 3y^2 + 4xy + 4x - 2y + 5$

$4x^2 + 4x(y+1) + 3y^2 - 2y + 5 = z$

$z = (2x + (y+1))^2 - (y+1)^2 + 3y^2 - 2y + 5$

$z = (2x + y + 1)^2 - y^2 - 2y + 1 + 3y^2 - 2y + 5$

$z = (2x + y + 1)^2 + 2y^2 - 4y + 4$

$z = (2x + y + 1)^2 + 2(y^2 - 2y + 2)$

$z = (2x + y + 1)^2 + 2(y-1)^2 + 2$

т.к. квадраты любых выражений всегда больше либо равны 0, минимальное значение „z" будет принимать тогда, когда квадраты выражений будут равны 0:

1. $2x + y + 1 = 0$ 2. $y - 1 = 0$

$2x + 1 + 1 = 0$ $\Leftarrow y = 1$

$x = -1$

+

$z_{min} = 0 + 0 + 2 = 2$

Ответ: $z_{min} = 2$

Задача №2

$x^2 + xy + y^2 \le 3(x - \sqrt{xy} + y^2)^2$

пусть $\sqrt{x} = a$; $\sqrt{y} = b$; следовательно: $a, b \ge 0$

$a^4+a^2\cdot b^2+b^4\le 3(a^2-ab+b^2)^2$

$a^4+a^2\cdot b^2+b^4\le 3(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$?

т.к. $a^2-ab+b^2>0$ (при $a,b\neq 0$),

разделим обе части неравенства на это выражение.

$a^2+ab+b^2\le 3(a^2-ab+b^2)$

$a^2+ab+b^2\le 3a^2-3ab+3b^2$

$0\le 2a^2-4ab+2b^2$

$0\le 2(a^2-2ab+b^2)$

$0\le 2(a-b)^2$, +

а это неравенство верно при любых a и b, что и требовалось доказать.

Задача №3

$\tan^2 x\cdot\tan^2 3x\cdot\tan 4x=\tan^2 x-\tan^2 3x+\tan 4x$

перенесем $\tan 4x$ в левую часть уравнения

$\tan^2 x\cdot\tan^2 3x\cdot\tan 4x-\tan 4x=\tan^2 x-\tan^2 3x$

$\tan 4x(\tan^2 x\cdot\tan^2 3x-1)=\tan^2 x-\tan^2 3x$

$\tan 4x=\dfrac{\tan^2 x-\tan^2 3x}{\tan^2 x\cdot\tan^2 3x-1}$

$\tan 4x\;\cancel{3x-1}=\dfrac{(\tan x-\tan 3x)(\tan x+\tan 3x)}{-(1-\tan x\cdot\tan 3x)(1+\tan x\cdot\tan 3x)}$

$\tan 4x=-\tan(x-3x)\cdot\tan(x+3x)$

$\tan 4x=-\tan(-2x)\cdot\tan 4x$

$\tan 4x=\tan 2x\cdot\tan 4x$

$\tan 4x\;\cancel{\neq 0}\;(1-\tan 2x)=0$

$\tan 4x = 0$ или $1 - \tan 2x = 0$ ОДЗ?

$4x = \pi k;\ k \in Z$ $\tan 2x = 1$

$x = \frac{\pi k}{4};\ k \in Z$ $\frac{+}{-}$ $2x = \frac{\pi}{4} + \pi n;\ n \in Z$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2};\ n \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi k}{4};\ k \in Z;\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2};\ n \in Z$

Задача №4

$x^2 \cdot 2^{2x} + 9(x+2) \cdot 2^x + 8x^2 \le (x+2) \cdot 2^{2x} + 9 \cdot x^2 \cdot 2^x + 8x + 16$

$(x^2 - (x+2))^{2x} + (9(x+2-x^2))^x + 8(x^2 - x + 2) \le 0$

пусть $A = x^2 - x + 2$, тогда:

$(x^2 - (x+2))^{2x} + (9(x+2-x^2))^x + 8A \le 0$

$A \cdot 2^{2x} + 9 \cdot A \cdot 2^{2x} + 8A \le 0$

$A(2^{2x} + 9 \cdot 2^{2x} + 8) \le 0$

разложим на множители A

$A = (x-2)(x+1)$

$(2^{2x} - 9 \cdot 2^{2x} + 8) \le 0$

$(2^x - 1)(2^x - 8) \le 0$

$2^x - 2^3 \le 0$

$y = 2^x$, монотонно возрастающая функция, следовательно:

$(2^x - 2^a)$ и $(x - a)$ совпадают по знаку.

$(x-2)(x+1)(x-0)(x-3) \le 0$

$x - 2 = 0$ ~~или~~ $x + 1 = 0$ $x - 0 = 0$ $x - 3 = 0$

$x = 2$ $x = -1$ $x = 0$ $x = 3$

Место для скрепки

НАВИГАТОР - 2025 15 февраля 2026г. (очный тур)

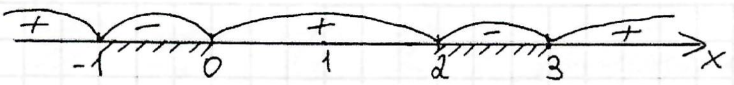
Место проведения: ФГБОУ ВО «Сибирский

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант

Класс

ЗАДАЧА	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
ОЦЕНКА											



при $x = 1$: $(-1)\cdot 2\cdot \cancel{0}\, 1\cdot(-2) > 0$

$x \in [-1;0] \vee [2;3]$

+

Ответ: $x \in [-1;0] \vee [2;3]$

Задача №5

Сравнить числа: $3\sqrt[3]{33}$ и $\sqrt{58}+2$

$A = 3\cdot\sqrt[3]{33} = \sqrt[3]{27\cdot 33} = \sqrt[3]{891}$

$B = \sqrt{58}+2$

Возведем в куб A и B:

$A^3 = 891$

$B^3 = (\sqrt{58}+2)^3 = 58\sqrt{58} + 3\cdot 58\cdot 2 + 3\cdot\sqrt{58}\cdot 4 + 8 =$

$= 70\sqrt{58} + 356$

Сравним 891 и $70\sqrt{58}+356$ где расчеты?

$\sqrt{58} \approx 7{,}642$; $(7{,}64)^2 \approx 58{,}37$

$58{,}37 > 58$

$A > B$

±

$3\sqrt[3]{33} > \sqrt{58}+2$

Ответ: $3\sqrt[3]{33} > \sqrt{58}+2$

Задача №6

Место для скрепки

НАВИГАТОР - 2025 — 15 февраля 2026г. (очный тур)

Место проведения: ФГБОУ ВО «Сибирский

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант ___ Класс ___

ЗАДАЧА	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
ОЦЕНКА											

$\vec{d_1}$; $\vec{d_2}$; $\vec{d_3}$; $\vec{d_4}$ — диагонали параллелепипеда.

Они связаны соотношением:

Одна из диаг. параллелепипеда равна сумме или разности трёх других

$\vec{d_1} = \vec{d_2} + \vec{d_3} + \vec{d_4}$

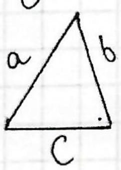
Длина любой диагонали должна быть меньше суммы трёх других:

$11 < 2+3+5$

$11 < 10$;

Следовательно, такой параллелепипед не существует

Задача №7



$a = 3$; $b = 5$

Каждая сторона в остроугольном треугольнике должна быть меньше суммы двух других сторон. и больше их разности.

1) $c < a+b$ 2) $c > b-a$

$c < 3+5$ $c > 5-3$

$c < 8$ $c > 2$

Т.к. по условию: c — нечетное число, то c может быть равно 3, 5, 7.

Место для скрепки

НАВИГАТОР - 2025

15 февраля 2026г. (очный тур)

Место проведения: ФГБОУ ВО «Сибирский

Пожалуйста, пользуйтесь тёмно-синей или чёрной ручкой, не пишите за пределами клеточек и на оборотах листов, не мните листы и не складывайте их пополам.

Вариант

Класс

ЗАДАЧА	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
ОЦЕНКА											

1) $a^2+b^2>c^2$

$3^2+5^2>c^2$

$9+25>c^2$

$c^2<34$

$c<\sqrt{34}$

$c<5,\ldots$

2) $b^2-a^2<c^2$

$5^2-3^2<c^2$

$25-9<c^2$

$16<c^2$

$c>4$

1) пусть $c=3$, тогда: $c^2=9$, но по условию: $c>4$

Следовательно: $c=3$ не подходит

2) пусть $c=5$, тогда: $c^2=25$, а по условию: $\begin{cases} c>4 \\ c<5,\ldots \end{cases}$

Следовательно: $c=5$ подходит

3) пусть $c=7$, тогда: $c^2=49$, но по условию: $c<5,\ldots$

Следовательно: $c=7$ не подходит.

$a=3$; $b=5$; $c=5$

$P=3+5+5=13$

Ответ: 13

+